Osaka University Knowledge Archive

Title	Wesentlich n ノ Abbildung; 其ノ他
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 192 p.25-p.33
Issue Date	1940-01-29
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74764
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

834. Wesentlich n ノ Abbildung, 其ノ他

小松 醇郎（阪大）

次ノ一聯ノ定理ヲ証明スル。

定理1. Komplex K^n ノ Homotopiegruppe $\pi^m(K^n)$ ニテ wesentlich n ノ Abbildung ガ作ル Abbildungsgruppe $\mathfrak{U}^m(K^n)$ ハ $\pi^m(S^n)$ ノ $\bar{\alpha}_n$ 個ノ直和ノ部分群ニ isomorph デアル. 特ニ $m=n$ ナラバ $\mathfrak{U}^n(K^n)$ ハ Modul デアル。

定理2. Komplex K_1^n カラ Komplex K_2^n ニ wesentlich n ノ Abbildung f ガ存在シ K_2^n ガ単純連結ナラバ K_i^n ニ Zyklus Z_i^n ガ存在シ $f(Z_1^n)=Z_2^n$ デアル。

定理3. Komplex K_1^n カラ Komplex K_2^n ニ wesentlich n ノ Abbildung f ガ存在シ K_1^n ガ単純連結ナラバ K_i^n ニ Zyklus Z_i^n ガ存在シ $f(Z_1^n)=Z^n$ デアル。

定理4. Sphäre S^n ノ wesentlich n ナ Bildkomplex K^n ハ Zyklus Z^n ヲ含ム。

定理5. Komplex K^n ガ wesentlich n in sich デアルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ或ル Überdeckung U ニ関シ $\neq 0$ ナ Zyklus Z^n ガ存在スルコトデアル。

定理6. Sphäre S^n カラ Grad 1 デ移ル Mannigfaltigkeit M^n ハ Sphäre カ又ハ Sphäre ト Homotopietypus ヲ等シクスルモノデアル。

定理4カラ, wesentlich n in sich ノ Komplex K^n デ Zyklus Z^n ガ存在シナイナラバ Sphäre カラノ wesentlich n ノ Bild トハナリ得ナイ. シカシソノ Komplex ハ或ル überdeckung ニ関シテ Zyklus Z^n ヲ持ツ. ソレ故 K^n ガ単純連結デ wesentlich n in sich ナラバ普通ノ Zyklus Z^n ガ存在スル。

wesentlich n in sich ノ性質ハ Homologie ダケデハ charakterisiren 出来ナイ. n-Zyklus ガ存在シナクテ wesentlich n ナ Komplex ノ例ハイクラデモ出来ル. 例ヘバ本誌, 第190号. 談話824.

例 I.

S^n カラ Grad 1 デ移ル Mannigfaltigkeit M^n ノ性質ハ分ッタガ Grad c $(c>1)$ デ移ルモノハ如何。ソノヤウナ M^n ノ Fundamentalgruppe ハ

有限群デアルガ位数 C ニナルノデハナカロウカト思フ。

定理 I ノ証明：

K^n ノ universelle Überlagerungskomplex $\widetilde{K}^n$ ヲトレバ

$$\pi^m(K^n) \approx \pi^m(\widetilde{K}^n)$$

$$u^m(K^n) \approx u^m(\widetilde{K}^n)$$

$\widetilde{K}^n$ ヲ Zellenzerlegung シテ $\bar{\alpha}_n$ 個ノ Zelle ニナッタトスル。

$$C_1^n, \ldots\ldots, C^n_{\alpha_n}$$

C_i^n ノ内部ハ n-単体ノ内部ニ homeomorph.
$u^m(\widetilde{K}^n)$ ノ一ツノ元ヲ與ヘル Abbildung ヲ f.

$$f(S^m) \subset \widetilde{K}^n$$

C_i^n ノ内部ノ一点 p_i, f ニヨル p_i ノ原像 $f^{-1}(p_i)$ ハ $\widetilde{K}^n$ 単純連結デアルカラ zusammenhängend ニ出来ル. 今 $\widetilde{K}^n - I_{nn}$. C_i^n ヲ一点ニ Identifizieren スレバ一ツノ Sphäre. 即チ f ハ $S^m \longrightarrow S^n$ ノ abbildung デアル. 故ニ $\pi^m(S^n)$ ノ或ル元 β_i ヲ定メル。

凡テノ Zelle C_i^n ニツキ行ヘバ結局

$$f \longrightarrow (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_{\bar{\alpha}_n}), \quad \beta_i \in \pi^m(S^n)$$

ナル對應ガ定マル。

此ノ對應ハ eindeutig デアル, 何トナレバ
$u^m(\widetilde{K}^n)$ ノ0元ヲ與ヘル f デ

$$f \to (\qquad\quad, \beta_i, \cdots\cdots), \quad \beta_i \neq 0$$

ナルコトハアリ得ナイ。アツメトスレバ：fト等シイ Klasse ノ Abbildung f'デ wesentlich n デハナイモノ存在スルカラ、次ノ Abbildung 存在スル。

$$F(S^m \times t) \subset \tilde{K}^n$$

$$F(S^m \times 0) = f(S^n) \subset \tilde{K}^n$$

$$F(S^m \times 1) = f'(S^m) \subset \tilde{K}^{n-1}$$

Fニヨルp_iノ原像 zusammenhängend ニシテオイテ $\tilde{K}^n - \mathrm{Inn.}\, C_i^n$ ヲ一点ニ Identifizieren スレバ

$$F(S^m \times t) \subset S^n$$

$$F(S^m \times 0) = f(S^m) \subset S^n$$

$$F(S^m \times 1) = f'(S^m) = \mathrm{Konst.}$$

従ッテ $f(S^m)$ ハ C_i^n ニテ $\pi^m(S^n)$ ノ0元デナクテハナラナイ。即チ $f = 0 \in u^m(\tilde{K}^n)$ ナラバ

$$f \to (0, 0, \cdots\cdots, 0)$$

以上ニヨッテ

$$u^m(\tilde{K}^n) \to (\overbrace{\pi^m(S^n), \cdots\cdots, \pi^m(S^n)}^{\bar{\alpha}_n \text{個}})$$

ナル對應ハ isomorph.

$m = n$ ナラバ $\pi^n(S^n)$ ハ整数群ダカラ $u^n(\tilde{K}^n)$ ハ Modul ニナル筈。

定理２ノ証明：

K_2^n 単純連結デアルカラ之レヲ Zellenzerlegung シ

テα_n個ノ Zelle ニナツタトスル。

$$C_1^n, \cdots\cdots, C_{\alpha_n}^n$$

然ラバ $\mathfrak{U}^n(K^n)$ ハα_n個ノ Basis ヲ持ツ modul $\mathfrak{G}(\alpha_n)$ ノ部分群ニ isomorph デアル。此ノ Isomorphismus k,

即チ $k(\mathfrak{u}^n(K^n)) \subset \mathfrak{G}(\alpha_n)$.

K^{n-1} ノ $(n-1)$-Homotopiegruppe $\pi^{n-1}(K^{n-1})$ ノ元ノウチ K^n デハ homotop 0 ニナルモノハ部分群 $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ヲナス. $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ハ $\mathfrak{G}(\alpha_n) - k(\mathfrak{u}^n(K^n))$ ニ isomorph auf ニ abbilden サレル.

i) $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ハ $\mathfrak{G}(\alpha_n)$ mod. $k(\mathfrak{u}^n(K^n))$ ニ homomorph ニ対応スル。

証明ハ Mannigfaltigkeit ノ場合ト同様. 本誌第191号. 談話828. p.623.

ii) homomorph auf デアル。

iii) isomorph デアル.

K^n, 従ツテ K^{n-1} $(n \geqq 3)$ ハ単純連結デアル. 従ツテ K^{n-1} ハ $(n-1)$-simple デアル. 然ラバ Mannigfaltigkeit ニ於ケル同様ナ定理ト殆ンド方針ハ変ラナイ. 本誌第189号. 談話818. p.530。

然ラバ K_1^n ニ於ケル n-Betti 群ノ係数群トシテ $(\lambda^{n-1}(K^{n-1}), \mathfrak{G}(\alpha_n))$ ナルアーベル群ヲトル。此ノ場合ニ $\neq 0$ ナ Zyklus Z_1^n ノ存在ノ場合ノ証明ハ Mannigfaltigkeit ノ場合ト同様. 本誌第191号.

談話 828, P. 626。

$K_1^n = Z_1^n$ ガ存在シ, 証明方法カラ分ル様ニ Abbildung f デ Z_1^n ガ wesentlich n ニ移ルノダカラ又 K_2^n ニ $\neq 0$ ナ Zyklus Z_2^n ガ存在シ

$$f(Z_1^n) = Z_2^n$$

<u>定理 3 ノ 証明</u>

$$f: K_1^n \longrightarrow K_2^n \quad \text{wesentlich } n.$$

K_2^n ノ universelle Überlagerungsraum $\tilde{K}_2^n$ トスレバ Abbildung $g(\tilde{K}_2^n) = K_2^n$.

K_1^n 單純連結デアルカラ

$$\tilde{f}(K_1^n) \subset \tilde{K}_2^n$$

デアッテ, 且ツ $\quad g\tilde{f} = f$

ナル如キ Abbildung $\tilde{f}$ ガ作レル。(証略)

$\tilde{f}$ ハ又 wesentlich n.

定理 2. ヨリ $\tilde{K}_2^n$ ニ Zyklus $\tilde{Z}_2^n$ ガ存在ス. 之ハ g ニヨッテ wesentlich n デアルカラ

$$g(\tilde{Z}_2^n) = Z_2^n \subset K_2^n$$

<u>定理 4 ノ 証明.</u>

$$f: S^m \longrightarrow K^n. \quad \text{wesentlich } n.$$

K^n ノ一点 p ノ原像 $f^{-1}(p)$ ヲ zusammenhängend ノ部分ニ分ツ. 即チ

$$f^{-1}(p) = A_1 + \cdots + A_\beta.$$

S^m デコノ A_i ヲ一点ニ Identifizieren スル.

K^n ノ凡テノ点ノ原像ニツキ之レヲ行ヘバ結局一ツノ

n-Komplex K_1^n ヲ得ル. 作リ方カラ K_1^n ハ單純連結デアル。

即チ f ハニツノ Abbildung ニ分解出来タ。

$$S^m \xrightarrow{g} K_1^n \xrightarrow{f_1} K^n,$$

$$f = f_1 g.$$

サテ f wesentlich n ナラバ f_1 ハ wesentlich n デアル. ソウデナイナラバ f_1 ト等シイ Klasse f_1' デ

$$f'(K_1^n) \subset K^{n-1}$$

然ラバ $f_1' g$ ハ f ト等シイ Klasse デアッテ而モ wesentlich n デナクナル, 假定ニ矛盾.

然ラバ定理3カラ K_1^n 及ビ K^n ニ n-Zyklus Z_1^n, Z^n ガ存在シ

$$f_1(Z_1^n) = Z^n$$

<u>定理5ノ證明</u>

K^n ニ Zyklus Z^n ガ存在スレバ wesentlich n in sich ハ明ラカデアル. 今 n-Zyklus ガ存在シナイトスレバ

$$f: K^n \longrightarrow K^n \ (\text{Identität})$$

ナル Abbildung ハ wesentlich n デアル。

今 $\pi^{n-1}(K^{n-1})$ ノウチ K^n デハ homotop 0 ナル奴ハ部分群 $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ヲ作ル。

K^n デ係數群ヲ $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ デアル Überdeckung ヲトッテ行クノデアルガ方針ハ Mannigfaltigkeit ノ場合ト変ハラナイ. (本誌第191号. 談話 828.

P. 624)

定理4ニヨツテ $u^n(K^n)=0$. 故ニ K^n ノ Zellenzerlegung.

$$C_1^n, \text{-----}, C_{\alpha_n}^n$$

ヲ作リ

$$\lambda^{n-1}(K^{n-1}) \longrightarrow \mathfrak{G}(\alpha_n)$$

ナル對應ハ Homomorph auf デアル。從ツテ今度ハ überdeckung ノ係數群ハ唯一ツノ群 $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ デ宜シイ。

<u>定理6ノ証明</u>

$$f: S^n \longrightarrow M^n : \text{grad } 1.$$

Hopf ノ定理ニヨリ M^n ノベッチ数 p^i ($i=1, 2, \text{-----}, n-1$) ハ0デアル. 又 Grad 1カラ Torsion t^i ($i=1, 2, \text{-----}, n-1$) ハ存在シナイ。

故ニ M^n が単純連結ナラバ M^n ハ Sphäre ト Homortopietypus ヲ等シクスル。(Hurewicz).

今 M^n 単純連結デナイトスレバ、ソノ universelle überlagerungskomplex $\tilde{M}^n$ ヲ作レバ

$$g(\tilde{M}^n) = M^n$$

Abbildung g ニ於ケル Abbildungsgrad p ハ有限、何トナレバ $\tilde{M}^n$ ハ Sphäre カラ wesentlich auf ノ Abbildung $\tilde{f}$ が存在スルカラ geschlossen.

$$\tilde{f}: S^n \longrightarrow \tilde{M}^n.$$

$$f = g\tilde{f}$$

$\tilde{f}$ ニ於ケル abbildungsgrad m トスレバ
abbildung f ノ grad ハ

$$mp.$$

$mp = 1$ カラ $p = 1$

即チ M^n ハ単純連結デアル。